不定积分的概念与性质

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

定义 1

如果在区间 I 上, 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$(或 $f(x)\mathrm{d}x$) 在区间 I 上的一个**原函数**.

- 因为 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

- 连续函数一定有原函数.

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

- 连续函数一定有原函数.
- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则对任意常数 C, $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

定理 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

- 连续函数一定有原函数.
- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则对任意常数 C, $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.
- $f(x)$ 在区间 I 上的任意两个不同原函数只相差一个常数 C.

定义 2

在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$(或 $f(x)\mathrm{d}x$) 在区间 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

其中记号 $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

定义 2

在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$(或 $f(x)\mathrm{d}x$) 在区间 I 上的**不定积分**, 记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

其中记号 $\int$ 称为**积分号**, $f(x)$ 称为**被积函数**, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**, x 称为**积分变量**.

- 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分, 即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

因而不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

例 1

求 $\int x^2 \mathrm{d}x$

例 1

求 $\int x^2 \mathrm{d}x$

解　因为 $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, 故 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数. 因此

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

例 2

求 $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

例 2

求 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　当 $x>0$ 时, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, 所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数. 故在区间 $(0,+\infty)$ 上

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C.$$

例 2

求 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　当 $x>0$ 时, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, 所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数. 故在区间 $(0,+\infty)$ 上

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C.$$

当 $x<0$ 时, $(\ln(-x))'=\frac{1}{x}$, 所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的一个原函数. 故在区间 $(-\infty,0)$ 上

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C.$$

综上,

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

常用基本积分公式

- $\int k \mathrm{d}x = kx + C$ (k 是常数)
- $\int x^{\mu} \mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \ (\mu \neq -1)$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$
- $\int \cos \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

定理 (性质 1)

设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在, 则

$$\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 (性质 2)

设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

随堂练习

求以下不定积分

(1) $\int(\sin x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$

(2) $\int(x^2+2x+4)\mathrm{d}x$

(3) $\int(e^x+4\cos x)\mathrm{d}x$

(4) $\int\frac{x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x$

随堂练习

求以下不定积分

(1) $\int(\sin x + \frac{1}{x})\mathrm{d}x = -\cos x + \ln|x| + C$

(2) $\int(x^2 + 2x + 4)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + C$

(3) $\int(e^x + 4\cos x)\mathrm{d}x = e^x + 4\sin x + C$

(4) $\int \frac{x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x = x - \frac{1}{x} + C$

作业

- 教材习题 4-1: 1(1)(2); 2(1)(3)(7)(12)(13)(14)(17)(25).